MAESTRÍA EN OPTIMIZACIÓN
Escuela Politécnica Nacional *Febrero, 2015*

Examen de admisión

1. Cálculo en $\mathbb{R}$.

   (a) Dada $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ en el intervalo $[-3, 5]$, encuentre el punto $c \in [-3, 5]$ en el cual se satisface el teorema del valor medio.

   (b) Sea g una función continua. Pruebe que

   $$\frac{d}{dx}\left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} g(t)\ dt\right) = g(f_2(x))f_2'(x) - g(f_1(x))f_1'(x),$$

   donde f_1 y f_2 son funciones reales continuas y diferenciables.

2. Considere la función $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2$.

   (a) Encuentre todos los puntos críticos de f.

   (b) Determine cuáles de estos puntos críticos son mínimos de la función f.

   (c) Estos mínimos, ¿son locales o globales?

3. Sea $\alpha(x)$ una función real continua, definida en el intervalo $[a, b]$. Demuestre que si

   $$\int_a^b \alpha(x)h(x)\ dx = 0,$$

   para toda función continua $h(x)$ con $h(a) = h(b) = 0$, entonces $\alpha(x) = 0,\ \forall x \in [a, b]$.

4. Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, definimos sus espacios rango y núcleo de la siguiente manera:

   $$\begin{aligned}\mathcal{R}(A) &:= \{y \in \mathbb{R}^m\ :\ y = Ax,\ \text{para algún } x \in \mathbb{R}^n\},\\ \mathcal{N}(A) &:= \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ Ax = 0\}.\end{aligned}$$

   (a) Demostrar que $\mathcal{R}(A) = \left[\mathcal{N}(A^T)\right]^\perp$, donde $V^\perp$ denota el complemento ortogonal del espacio vectorial V.

   (b) Empleando el resultado anterior, demostrar que el sistema lineal $Ax = b$ no tiene solución si y sólo si existe un vector $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y^T A = 0^T$ y $y^T b \neq 0$.

5. Considere dos conjuntos de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$: $\{x_1, \dots, x_n\}$ y $\{y_1, \dots, y_n\}$ con $n \geq 2$. Indique si las siguientes matrices son invertibles (y justifique su respuesta):

   (a) $x_1 y_1^\top$

   (b) $x_1 y_1^\top + x_1 y_2^\top + \cdots + x_1 y_n^\top$

   (c) $x_1 y_1^\top + x_2 y_2^\top + \cdots + x_n y_n^\top$