Maestría en Optimización Matemática

Escuela Politécnica Nacional *Septiembre, 2018*

Examen de admisión

1. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{si} \quad x+1 > 0, \\ -x^2+1 & \text{si} \quad x+1 \leq 0. \end{cases}$$

   1. Determine si la función es continua en $x = -1$.
   2. Determine si la función es derivable en $x = -1$.

2. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto f(x,y) = (y - 3x^3)(y - x^2).$$

   Demuestre que:

   1. $(0,0)$ es un punto crítico de f.
   2. f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ en toda línea recta que pasa por $(0,0)$, es decir, si definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ por $g(t) = (at, bt)$, $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0.
   3. $(0,0)$ no es un mínimo relativo de f.

3. Considerar una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con la siguiente propiedad: $[A|I_m]$ (la matriz extendida con la matriz identidad de tamaño m) se puede reducir usando operaciones por filas a la matriz $[B|P]$. Explique por qué en este caso existe una matriz no singular P tal que $PA = B$.

4. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que $\langle u, v \rangle = 0$ si y sólo si la desigualdad

$$\|u\| \leq \|u + av\|$$

   se cumple para cualquier escalar $a \in \mathbb{R}$.
   (La expresión $\langle u, v \rangle$ denota al producto interno entre los vectores u y v. La expresión $\|u\|$ denota a la norma del vector u.)